Chapitre VIII
Calcul matriciel

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou un corps commutatif quelconque.

I – Matrices et applications

Les matrices sont un outil de calcul et de représentation des applications linéaires.

1. Définitions

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ donnés. On appelle *matrice* de type $\mathrm{n} \times \mathrm{p}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau de n lignes et de p colonnes de nombres dans $\mathbb{K}$.

$$\begin{array}{cccl} & \begin{array}{ccc} \phantom{a_{11}} & j & \phantom{a_{1p}} \end{array} & & \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & i & \updownarrow \text{ n lignes} \\ & \longleftrightarrow & & \\ & \text{p colonnes} & & \end{array}$$

On note $A = (a_{ij})$ cette matrice.
Premier indice i : indice de la ligne dans A.
Second indice j : indice de la colonne dans A.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type $\mathrm{n} \times \mathrm{p}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemples : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}$, $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}$.

Remarque : Lorsque $n = p$, on parle de *matrices carrées*. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Matrices carrées associées à une application linéaire

Soient E et F deux espace vectoriels de dimension respective n et p.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Soient $B_E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E et $B_F = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \dots, \overrightarrow{f_p})$ une base de F.

On sait que f est déterminée par la donnée des vecteurs $f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_n}) \in F$:
→ Chaque $f(\overrightarrow{e_j})_{j \in \{1,\dots,n\}}$ possède p coordonnées dans B_F
→ f est déterminée par $\mathrm{n} \times \mathrm{p}$ nombres.

Par convention, on range les coordonnées de chaque $f(\overrightarrow{e_j})$ **en colonne** dans la matrice.

Définition : On note $A = \underset{B_E,B_F}{Mat}(f)$ cette matrice, et on l'appelle matrice de f dans les bases B_E et B_F.

$$\text{On a} \quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(\vec{e_1}) & & f(\vec{e_j}) & & f(\vec{e_n}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \; & \cdots & & \cdots & \; \\ & \cdots & a_{ij} & \cdots & \\ & \cdots & & \cdots & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \vec{f_1} \\ \vec{f_i} \\ \vec{f_p} \end{array}$$

avec a_{ij} la i$^{\text{ème}}$ coordonnée de $f(\vec{e_j})$ dans la base B_F.

Si $f: E \to F$ avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$, alors $\underset{B_E,B_F}{Mat}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Remarque : Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$ avec les bases canoniques, alors on note simplement $A = Mat(f)$.

3. Premiers exemples

$*$ Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie par :
$f(1,0,0) = (1,2)$, $f(0,1,0) = (0,-1)$, $f(0,0,1) = (3,1)$

On a alors $Mat(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}$.

→ On met les coordonnées des images des vecteur de la base de départ en colonne dans la matrice.

$*$ Soit $f: \substack{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (12x-4y, x+y)}$. On a $f(1,0) = (12,1)$ et $f(0,1) = (-4,1)$.

On a alors $Mat(f) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}$.

→ On peut reporter directement les coefficients de l'expression dans les lignes de $Mat(f)$.

Attention : La matrice de f *dépend* du choix de base dans l'espace de départ et d'arrivée.

Si l'on prend pour l'exemple précédent la base canonique $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ comme base de départ et la base $B' = \big((12,1),(-4,1)\big) = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ comme base de travail à l'arrivée, alors on a :

$$\begin{aligned} f(\vec{e_1}) &= f(1,0) = (12,1) = 1 \times \vec{f_1} + 0 \times \vec{f_2} \\ f(\vec{e_2}) &= f(0,1) = (-4,1) = 0 \times \vec{f_1} + 1 \times \vec{f_2} \end{aligned}$$

$$\text{Ce qui donne :} \quad \underset{B,B'}{Mat}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \vec{f_1} \\ \vec{f_2} \end{array}$$

→ Pour une *même application* f, le « codage matriciel » est *différent* d'une base à une autre.

$*$ Soit $D: \substack{\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P'}$ l'application linéaire associant à un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ sa dérivée.

On sait que $B = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

On a donc : $Mat(D) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 1' & X' & X^{2'} & & X^{n'} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array} \end{array}$

$*$ Soit $I: \underset{P \mapsto \int_0^1 P(t)dt}{\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}}$ l'application linéaire associant à un polynôme son intégrale de 0 à 1.

On a $Mat(I) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} I(1) & I(X) & & I(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} \end{array}$. Il s'agit en fait d'une matrice ligne.

Dans cette convention, une matrice ligne est en fait une matrice d'une forme linéaire. Une **matrice ligne n'est pas un vecteur** en calcul matriciel !

$*$ En fait, **en calcul matriciel, un vecteur se représente par une colonne !**

En effet, soient $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ donné et $f: \underset{t \mapsto t\vec{v}}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n}$. La matrice de f est par définition la colonne des coordonnées de $\vec{v}$, puisque $\vec{v} = f(1)$ avec 1 base de $\mathbb{R}$. On voit que les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ sont en bijection avec les choix de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

$*$ Matrice de l'identité : Soit $Id_E: \underset{\vec{v} \mapsto \vec{v}}{E \to E}$ l'application identité, et soit $B_E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$ une base de E.

On a alors : $\underset{B_E, B_E}{Mat}(Id_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$*$ Soit $R_\theta: \underset{Rotation\ d'angle\ \theta}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$ l'application linéaire rotation d'angle θ.

On a $Mat(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

$*$ Projection sur l'axe Ox le long de Oy : $Mat(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Calcul matriciel de l'image d'un vecteur

Soient $f: \underset{\vec{v} \mapsto f(\vec{v})}{E \to F}$ une application linéaire, $B_E = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_p})$ une base de E et $B_F = (\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n})$ une base de F.

Problème : On veut calculer l'image par f de $\vec{v} \in E$ en utilisant $A = \underset{B_E, B_F}{Mat}(f)$ et les coordonnées $(x_1, \ldots, x_p)$ de $\vec{v}$ dans B_E.

Par linéarité, on a $\vec{v} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_p\vec{e_p}$ et $f(\vec{v}) = x_1 f(\vec{e_1}) + \cdots + x_p f(\vec{e_p})$.

Les coordonnées de $f(\overrightarrow{e_1})$ dans B_F se trouvent dans la première colonne C_1 de A.
$\rightarrow \forall j$, les coordonnées de $f(\overrightarrow{e_j})$ dans B_F sont dans la j[ème] colonne C_j de A.

Les coordonnées de $f(\vec{v})$ sont donc dans la colonne $Y = x_1C_1 + \cdots + x_pC_p$

Donc la i[ème] coordonnée de $f(\vec{v})$ est $y_i = x_1a_{i1} + \cdots + x_pa_{ip} = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p$

$y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j$ pour $1 \leq i \leq n$ donné.

Dans la pratique : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Avec les coordonnées de $\vec{v}$ en colonne, celles de $f(\vec{v})$ aussi, $n = \dim F$ et $p = \dim E$

En conclusion : $\begin{array}{ccc} \vec{v} \in E & \rightarrow & f(\vec{v}) \in F \\ B_E \downarrow & & \downarrow B_F \\ X & \rightarrow & Y = AX \end{array}$

Attention : On rappelle que les vecteurs sont représentés par des *colonnes* de coordonnées en calcul matriciel.

Par exemple, $\vec{v} = (1,2,3) \leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Inversement, étant donné une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on lui associe une application linéaire :
$f: \substack{\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \\ X \mapsto Y = AX}$ avec X en colonnes !

Par construction, la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ est A.

Remarque : Le choix de convention pour les matrices et les vecteurs s'explique par le lien avec les systèmes linéaires :

$(S) = \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = y_1 \\ \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \quad AX = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ écrit en colonne.

Avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ qui est en fait les coefficients du système dans l'ordre choisi. La convention est donc «la bonne » si on travaille avec des systèmes linéaires.

Exemples :

$* \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow f: \substack{\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ X \mapsto AX}$. Calculer $f(1,-1,2)$.

Pour le calculer, on fait $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times 2 + 2 \times 3 \\ 1 \times 4 + (-1) \times 5 + 2 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

On a donc que $f(1,-1,2) = (5,11)$.

$*\ A = Mat(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ matrice de la rotation d'angle θ. Calculer $R_\theta(x,y)$.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

On a donc $R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta\,, x\sin\theta + y\cos\theta)$

II – Opérations sur les matrices

1. Structure d'espace vectoriel

Par définition, une matrice $n \times p$ est un tableau de $n \times p$ nombres dans $\mathbb{K}$.

On a naturellement $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n\times p}$

$\rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev.

i) Somme de matrices de même taille

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$

Alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ = matrice somme des composantes de mêmes indices.

Un exemple pédagogique : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$. Alors $A + B = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$!?

ii) Multiplication externe

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\lambda A = (\lambda a_{ij})$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$. Alors $\lambda A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Propriétés :

i) L'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev.

ii) La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \end{array}$

On a alors $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}$.

iii) Soient deux espaces vectoriels E et F avec $\dim E = p$ et $\dim F = n$, de base respective B_E et B_F. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a :

$*\ Mat_{B_E,B_F}(f+g) = Mat_{B_E,B_F}(f) + Mat_{B_E,B_F}(g)$,

$* \, Mat_{B_E,B_F}(\lambda f) = \lambda \, Mat_{B_E,B_F}(f)$.

$\rightarrow \varphi : \begin{smallmatrix} \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f \mapsto \underset{B_E,B_F}{Mat}(f) \end{smallmatrix}$ est un isomorphisme.

2. Produit de matrices, composition des applications linéaires

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension respective n, p, q.
Soient $B_E = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$, $B_F = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_p})$, $B_G = (\overrightarrow{g_1}, \dots, \overrightarrow{g_p})$ les bases respectives de E, F et G.

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires.

On considère $h = g \, o \, f : E \to G$

Problème : Trouver un moyen d'exprimer $C = \underset{B_E,B_G}{Mat}(g \, o \, f)$ à l'aide des matrices $A = \underset{B_E,B_F}{Mat}(f)$ et $B = \underset{B_F,B_G}{Mat}(g)$

Par définition, la j$^{\text{ème}}$ colonne C_j de $\underset{B_E,B_G}{Mat}(g \, o \, f)$ est constituée des coordonnées dans la base B_G de $(g \, o \, f)(\overrightarrow{e_j}) = g\left(f(\overrightarrow{e_j})\right)$, ce qui est une colonne de coordonnées en calcul matriciel.

$\rightarrow C_j = \underset{B_F,B_G}{Mat}(g)$ (j$^{\text{ème}}$ colonne de $\underset{B_E,B_F}{Mat}(f)$)

$\rightarrow C_j = B(AX_j) = BA_j$ avec $X_j = (0,0,0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ valant 1 à la j$^{\text{ème}}$ colonne.

$\rightarrow$ On obtient les coefficients $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} a_{kj}$ de C.

Présentation des calculs

$$\begin{array}{ccc}
B = \underset{B_F,B_G}{Mat}(g) & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1i} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{pi} & a_{pn} \end{pmatrix} & \longleftarrow A = \underset{B_E,B_F}{Mat}(f) \\
\downarrow & & \\
\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ b_{i1} & \ddots & b_{ip} \\ b_{q1} & \cdots & b_{qp} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} & \longleftarrow C = \underset{B_E,B_G}{Mat}(g \, o \, f)
\end{array}$$

Synthèse de la construction

Si $A = \underset{B_E,B_F}{Mat}(f)$ et $B = \underset{B_F,B_G}{Mat}(g)$, alors $C = \underset{B_E,B_G}{Mat}(g \, o \, f) = BA$.

Attention : Le produit matriciel est bien défini si la *largeur* de B est égale à la *hauteur* de A : qui est égale à la dimension de l'espace intermédiaire F.

Exemples : $*$ Calculer BA pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcul : $\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & -3 & -3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix} \rightarrow BA = \begin{pmatrix}-3 & -3 & -3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$

$*$ Si $B = (1 \quad 2 \quad 3)$ et $A = \begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}$ alors $BA = (12)$: c'est une « matrice nombre ».

Explication :
$(1 \quad 2 \quad 3) = Mat(l)$ avec $l: \begin{smallmatrix}\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\\(x,y,z) \mapsto (x+2y+3z)\end{smallmatrix}$ une forme linéaire et $\vec{v} = (4,-5,6)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

$\rightarrow$ On a donc $l(\vec{v}) = 12$, qui est bien un nombre.

$*$ Si $f : \begin{smallmatrix}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\\X \mapsto AX\end{smallmatrix}$ est associée à la matrice $A = \begin{pmatrix}-1 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix}$

On peut alors calculer $A^2 = \begin{pmatrix}-1 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix} = A$

On trouve que $A^2 = A$!

On a donc $Mat(f \text{ o } f) = A^2 = A = Mat(f)$, ce qui équivaut à $f \text{ o } f = f$, puisque qu'une application linéaire est déterminée par sa matrice dans une base donnée.

Interprétation : L'application linéaire f est la projection sur l'image de f engendrée par $(-1,-1) = f(\vec{e_1})$ par exemple, le long du noyau de f.

- Si on pose $\vec{e_1}' = (1,1)$, on a donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}\vec{e_1}'$

- On sait que $\ker f = \left\{X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mid AX = 0\right\}$ Déterminons le.

$\begin{pmatrix}-1 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-x + 2y = 0\\-x + 2y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \{x = 2y$

On a donc $\ker f = \left\{X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mid x = 2y\right\} = \mathbb{R}\vec{e_2}'$ avec $\vec{e_2}' = (2,1)$

- Que vaut alors $Mat(f)$ dans $B' = \left(\vec{e_1}', \vec{e_2}'\right)$?

Sachant que $f\left(\vec{e_1}'\right) = (1,1) = 1 \times \vec{e_1}' + 0 \times \vec{e_2}'$ et que $f\left(\vec{e_2}'\right) = (0,0) = 0 \times \vec{e_1}' + 0 \times \vec{e_2}'$
$A' = Mat_{B',B'}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, beaucoup plus simple que A, car la base B' est mieux adaptée à l'étude de f.

$*$ Si $A = \begin{pmatrix}2 & -4\\1 & 2\end{pmatrix}$ alors on a $A^2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow A^2 = 0$ mais $A \neq 0$

$\rightarrow A^2 = Mat(f \text{ o } f) = 0$ ce qui équivaut à $f \text{ o } f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \ker f$.

En fait, on a ici : $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}\,(2,1) = \ker f = \{(x,y) \mid x - 2y = 0\}$.

3. Propriétés générales du produit de matrices

i) Ce qui marche

∗ Le lien entre produit de matrice et composition des applications linéaires.
Soient deux matrices $A = \underset{B_E,B_F}{Mat}(f)$ et $B = \underset{B_F,B_G}{Mat}(g)$.

Alors on a $C = \underset{B_E,B_G}{Mat}(g \circ f) = \underset{B_F,B_G}{Mat}(g) \times \underset{B_E,B_F}{Mat}(f)$.

Si les produits sont bien définis on a :

∗ $(AB)C = A(BC)$ (associativité)

∗ $(A+B)C = AC + BC$ et $C(A+B) = CA + CB$ (distributivité par rapport à $+$)

∗ Le produit est automatiquement bien défini pour les matricées carrées d'ordre n.

∗ L'élement neutre est $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Mat_{B_E,B_E}(Id)$
On l'appelle la *matrice d'identité* d'ordre n.

→ On a une *structure d'algèbre* sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, isomorphe à $\mathrm{End}(E)$ si $\dim E = n$.

ii) Ce qui ne marche pas toujours

∗ **Attention :** Le produit $A \times B$ n'est pas toujours bien défini : par exemple, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ n'existe pas. Il faut que la largeur de A soit égale à la hauteur de B.

Comme dans $\mathrm{End}(E)$, le produit des matrices :

∗ N'est pas commutatif en général : $AB \neq BA$

∗ N'est pas intègre : $AB = AC$ avec $A \neq 0$ n'implique pas que $B = C$.

Exemple : Si on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

iii) Matrices inversibles

Soient $f : E \to F$ une application linéaire et B_E, B_F les bases respectives de E et F.

Soit $A = \underset{B_E,B_F}{Mat}(f)$ la matrice associée.

Définition : On dit que A est inversible si et seulement si f est un isomorphisme.

On note alors $A^{-1} = \underset{B_F,B_E}{Mat}(f^{-1})$ la matrice inverse de A.

Remarques : **i)** Seules les matrices *carrées* peuvent être inversibles : car elles sont associées à un isomorphisme, c'est-à-dire à deux espaces de mêmes dimensions.

ii) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ est une matrice carrée d'ordre n, alors on lui associe l'application linéaire $f\colon {}^{\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n}_{X \mapsto Y = AX}$ écrite en colonne.

On voit alors que A est inversible si et seulement si pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$, l'équation $Y = AX$ admet une unique solution $X = A^{-1}Y$

Propriétés :
i) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice inversible, alors $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$

ii) Si A, B sont des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors le produit des matrices AB est aussi inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Démonstration : **ii)** C'est OK au niveau des isomorphismes. Si f et g sont deux isomorphismes comparables, alors $f \circ g$ est un isomorphisme et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Autre méthode :
On considère l'équation

$$\begin{aligned}(AB)X = Y &\Leftrightarrow A(BX) = Y\\ &\Leftrightarrow BX = A^{-1}Y\\ &\Leftrightarrow X = B^{-1}A^{-1}Y \text{ unique solution.}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

i) Si $A = Mat(f)$, et $A^{-1} = Mat(f^{-1})$ alors :

$$\begin{aligned}A^{-1}A &= Mat(f^{-1}) \times Mat(f)\\ &= Mat(f^{-1} \circ f)\\ &= Mat(Id)\\ &= I_n\end{aligned}$$

Exercice : On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 1 : A est-elle inversible ?

Question 2 : Calculer sa matrice inverse A^{-1}

Réponse 1 : On considère $f\colon {}^{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}_{X \mapsto Y = AX}$

L'endomorphisme f est un isomorphisme si et seulement si $\ker f = \{\vec{0}\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$, c'est-à-dire que $X \in \ker f$.

$$AX=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y+z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \ker f = \{\vec{0}\}$ et donc f est un isomorphisme. A est donc une matrice inversible.

On a donc pu montrer que A est inversible *sans* résoudre $AX=Y$.

Le théorème du rang nous donne donc que $rg(f)=3$ et donc que le rang des colonnes de $\mathcal{A}$ est de 3.

$\rightarrow$ Im f est engendré par les colonnes de A.

Réponse 2 : Pour *calculer* A^{-1},

il *faut résoudre* le système $AX=Y$ avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$AX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=x' \\ x+2y+z=y' \\ 2x+3y+2z=z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=x' \\ y+z=y'-x' \\ y+2z=z'-2x' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=x' \\ y+z=y'-x' \\ z=z'-y'-x' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-2y'+z' \\ y=2y'-z' \\ z=-x'-y'+z' \end{cases}$$

La solution étant unique, on montre en même temps que A est inversible.

On trouve donc en reportant les coefficients $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>**Conseil**</u> : Après ce genre de calcul, il est bon de vérifier que $A^{-1}A=AA^{-1}=I_n$ (au moins quelques coefficients).

<u>Exemple 1 : inversion des matrices 2 × 2</u>

<u>**Théorème**</u> **:** Une matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si le *déterminant* $\det A = ad-bc \neq 0$, auquel cas $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

<u>**Exemple**</u> **:** Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ alors $\det A = 4-6=-2$.

$\rightarrow$ A est inversible et $A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration : On considère deux vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

On a : $AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (ad - bc)x_1 = dy_1 - by_2 \\ (cb - ad)x_2 = cy_1 - ay_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\det A}(dy_1 - by_2) \\ x_2 = \frac{1}{\det A}(-cy_1 + ay_2) \end{cases}$$

Synthèse : - Si $\det A \neq 0$, le système $AX = Y$ a *au plus* une solution :
→ A est injective et donc inversible
→ On a la solution et $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- Si $\det A = 0$, alors on voit que $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \in \ker A$ et $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \in \ker A$:
→ A n'est pas injective si a, b, c, et d sont non tous nuls.

Exemple 2 : Les matrices triangulaires

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ est une matrice triangulaire supérieure.}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ est une matrice triangulaire inférieure.}$$

Théorème : La matrice A (ou $\mathcal{B}$) est inversible si et seulement si tous les a_{ii} (ou les b_{ii}) sont non nuls pour $1 \leq i \leq n$.

Démonstration :
$*$ Si tous les a_{ij} sont non nuls, alors A est inversible car le système $AX = Y$ est échelonné avec n inconnues principales $x_1, \dots, x_n$, ce qui rend la solution unique.

$*$ Si $a_{i_0 j_0} = 0$, alors on considère $A\overrightarrow{e_1}, A\overrightarrow{e_2}, \dots, A\overrightarrow{e_{i_0}}$. C'est un système de i_0 vecteurs dans l'espace engendré par $\left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_{i_0 - 1}}\right)$ de dimension $i_0 - 1$

$\Rightarrow S = \left(A\overrightarrow{e_1}, \dots, A\overrightarrow{e_{i_0}}\right)$ est une famille liée.

Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{i_0}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 A\overrightarrow{e_1} + \cdots + \lambda_{i_0} A\overrightarrow{e_{i_0}} = \vec{0}$

→ $A\left(\lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \lambda_{i_0} \overrightarrow{e_{i_0}}\right) = A\vec{v} = \vec{0}$ ce qui fait que $\vec{v} \neq \vec{0} \in \ker A$

→ A n'est donc pas inversible.

Remarque utile : Une combinaison linéaire de colonnes de A qui s'annule équivaut à un vecteur dans le noyau avec les mêmes coefficients.

Illustration : On pose $E = \mathbb{C}_n[X]$. Soient $a, \lambda \in \mathbb{C}$. On considère $f\colon \begin{array}{c} E \to E \\ P \mapsto \lambda P - (X-a)P' \end{array}$

Question : A quelles conditions sur a et λ, f est-elle un isomorphisme ?

On considère la matrice de f dans la base canonique $B = (1, X, \dots, X^n)$.

De plus, on voit que $f(X^P) = \lambda X^P - (X-a)pX^{p-1} = (\lambda - p)X^P + apX^{p-1}$

$$\text{On a donc } Mat(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & pa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-p & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & na \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-n \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ X \\ \\ X^{p-1} \\ X^p \\ \\ X^n \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & & f(X^p) & & f(X^n) \end{array} & \end{array}$$

$Mat(f)$ est triangulaire. Cela vient du fait que $\deg f(P) \leq \deg P$.

Finalement, dire que f est un isomorphisme équivaut à dire que $Mat(f)$ est inversible, et donc que $\lambda \notin \{0,1,\dots,n\}$.

Conséquence : Si $Q \in E$ donné, alors l'équation différentielle $\lambda P - (X-a)P' = Q$ possède une unique solution, avec $P \in E$ si $\lambda \notin \{0,1,\dots,n\}$.

Remarque : On ne résout pas l'équation différentielle avec les techniques habituelles difficiles à justifier, comme la variation de la constante. Voyons pourquoi :

$$\lambda P - (X-a)P' = 0 \Leftrightarrow \frac{P'}{P} = -\frac{\lambda}{X-a} \in \mathbb{C} \overset{?}{\Rightarrow} \ln\big(P(x)\big) = -\lambda \ln(X-a) + cste$$

→ Implication éronnée car on ne connait pas le logarithme d'une valeur complexe.

4. Transposition

i) Transposée de matrice

Définition : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle transposée de cette matrice la matrice ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que $({}^tA)(ij) = (a_{ji})$ (On échange les lignes et les colonnes.)

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

En fait, la i$^{\text{ème}}$ ligne de A devient la i$^{\text{ème}}$ colonne de ${}^tA$.

Propriétés de la transposition des matrices :

i) L'application linéaire « transposition » $^t : \substack{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A \mapsto {}^tA}$ est un isomorphisme égal à sa réciproque. En effet, $^t(^tA) = A$.

ii) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Cela donne $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

On a $^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ $\rightarrow$ **Attention**, l'ordre est inversé.

iii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si ^tA l'est aussi et $(^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Démonstration :

i) A faire en exercice.

ii) Pour $1 \leq i \leq q$ et $1 \leq j \leq n$ donnés, on regarde $^t(AB)_{ij}$

$$
\begin{aligned}
{}^t(AB)_{ij} &= (AB)_{ji} \\
&= \sum_{k=1}^{p} a_{jk}\, b_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{p} b_{ki} a_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^{p} {}^t(B)_{ik}\, {}^t(A)_{kj} \\
&= ({}^tB\,{}^tA)_{ij}.
\end{aligned}
$$

iii) Si A est inversible, alors A^{-1} existe et $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$

$*\ {}^t(AA^{-1}) = {}^tI_n = I_n = {}^t(A^{-1})\,{}^t(A)$

$*\ {}^t(A^{-1}A) = {}^tI_n = I_n = {}^t(A)\,{}^t(A^{-1})$

$\rightarrow$ ^tA est inversible et $(^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Ce résultat dépend de la caractérisation suivante **:**

Proposition :

Soit $f \in End(E)$ donné telle qu'il existe une application $g \in End(E)$ avec $f\ o\ g = g\ o\ f = Id$.

Alors f est un isomorphisme et $g = f^{-1}$ (propriété générale, cf TD1).

Démonstration : On considère l'équation $f(x) = y$ avec y donné.

$\rightarrow g\big(f(x)\big) = x = g(y)$ est unique

$\rightarrow f$ est injective

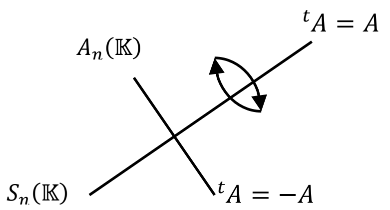
Réciproquement, si on pose $x = g(y)$, alors $f(x) = f\big(g(y)\big) = y$.

Conclusion **:** $x = g(y)$ est l'unique solution de $f(x) = y$

$\rightarrow f$ est bijective et $g = f^{-1}$

Remarque :

L'application $^t : \substack{\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) \\ A \mapsto {}^tA}$ avec $^t\ o\ ^t = Id$ est une *symétrie* dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.



$S_n(\mathbb{K}) = \{A \mid {}^tA = A\} =$ matrices symétriques $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

$A_n(\mathbb{K}) = \{A \mid {}^tA = -A\} =$ matrices asymétriques $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$

On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) \rightarrow$ tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit $A = \frac{A+{}^tA}{2} + \frac{A-{}^tA}{2}$

Exemples : $* \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$*$ En physique, la matrice d'inertie est une matrice symétrique : $\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{pmatrix}$.

$*$ Une matrice antisymétrique célèbre est celle du produit vectoriel : Soit $\vec{v} = (a, b, c)$ donné.

L'application linéaire $\wedge: \underset{\vec{X}=(x,y,z)\mapsto\vec{v}\wedge\vec{X}}{\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3}$ donne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$

$\rightarrow Mat(\wedge) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.

ii) Transposée d'une application linéaire

Problème : Donner l'opération naturelle correspondant à la transposée des matrices au niveau des applications linéaires.

Rappels : Soit E un espace vectoriel donné. On note E^* l'espace dual de E. $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

Par exemple, les formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ sont de la forme $l: \underset{(x_1,\dots,x_n)\mapsto(a_1x_1+\dots+a_nx_n)}{\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}}$

Définition : Soit $f: \underset{\vec{v}\mapsto f(\vec{v})}{E\rightarrow F}$ une application linéaire.
On note ${}^tf: \underset{l\mapsto l\ o\ f}{F^*\rightarrow E^*}$ l'application linéaire *transposéee* de f.

On fait agir f à droite des formes linéaires plutôt qu'à gauche des vecteurs !

Remarque : Cette définition est indépendant du choix de la base.

Rappels : Soit $B_E = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E donnée. La base duale de E^* est $B_{E^*} = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ avec e_i^* la i$^{\text{ème}}$ coordonnée de $\vec{v}$ dans B_E.
$\rightarrow$ Si $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n)$ dans B_E, alors $e_i^*(\vec{v}) = x_i$.

Si $l \in E^*$, alors $l(\vec{v})$ s'écrit

$$l(\vec{v}) = x_1 l(\overrightarrow{e_1}) + \dots + x_n l(\overrightarrow{e_n}) = (l(\overrightarrow{e_1})e_1^* + \dots + l(\overrightarrow{e_n})e_n^*)(\vec{v})$$

$\rightarrow$ Les coordonnées de l dans B_{E^*} sont $\left(l(\overrightarrow{e_1}), \dots, l(\overrightarrow{e_n})\right)$.

On montre que les deux notions de transposition définies au niveau des matrices et des applications linéaires, sont compatibles.

Théorème :
Soient $f: E \to F$ une application linéaire et B_E, B_F les bases respectives de E et F. Soient B_{E^*}, B_{F^*} les bases duales respectives de E^* et F^*.

Alors $\underset{B_{F^*}, B_{E^*}}{Mat}({}^t f) = {}^t\underset{B_E, B_F}{Mat}(f)$.

Démonstration :
Au niveau des applications linéaires, on a ${}^t f : \substack{F^* \to E^* \\ l \mapsto l\ o\ f}$.
Au niveau du calcul matriciel :
- Si l est vue comme une application linéaire sur F, c'est une matrice ligne, et l'action de ${}^t f$ est :

$$L = \left(l(\overrightarrow{f_1}), \dots, l(\overrightarrow{f_n})\right) \longrightarrow L' = L \times Mat(f)$$

- Si l est vue comme un vecteur de F^*,

$${}^t L = \begin{pmatrix} l(\overrightarrow{f_1}) \\ \vdots \\ l(\overrightarrow{f_n}) \end{pmatrix} \xrightarrow{{}^t f} {}^t L' = Mat({}^t f) \times {}^t L$$

On doit donc avoir

$${}^t L' = Mat({}^t f) \times {}^t L = {}^t(L \times Mat(f)) = {}^t Mat(f) \times {}^t L \text{ pour tout } L,$$

ce qui implique : $Mat({}^t f) = {}^t Mat(f)$.

Remarque : Le point de vue abstrait donne facilement ${}^t(f\ o\ g) = {}^t g\ o\ {}^t f$. En effet,

$${}^t(f\ o\ g)(l) \overset{\text{def}}{=} l\ o\ f\ o\ g = \left({}^t f(l)\right) o\ g = {}^t g\left({}^t f(l)\right) = ({}^t g\ o\ {}^t f)(l)$$

→ Explique la formule ${}^t(AB) = {}^t B\, {}^t A$.

Remarque : Les notions de dualité et d'action à droite sur les formes linéaires sont abstraites, mais très importantes en physique quantique ! (cf. formalisme des bra et ket de Dirac.)

Interprétation de $\ker({}^t f)$

Soient $f: E \to F$ une application linéaire et $l \in F^*$.

On a $l \in \ker({}^t f) \Leftrightarrow ({}^t f)(l) = 0 \Leftrightarrow l\ o\ f = 0$,
ce qui fait que $\operatorname{Im} f \subset \ker l$ et donc que $l = 0$ est une équation de $\operatorname{Im} f$.

On a en particulier que ${}^t f$ injective équivaut à f surjective, puisqu'alors $\operatorname{Im} f = F$ ne satisfait aucune équation non triviale.
C'est un principe général valable dans tout espace vectoriel.

Exemple : On considère $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.On a $l = (a, b, c) \in \ker({}^t f)$

$\Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset H = \{\vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\} = \ker l$.

Au niveau matriciel, $l \in \ker({}^t f) \Leftrightarrow LA = 0 \ \Leftrightarrow {}^t A({}^t L) = 0$

$\Leftrightarrow aL_1 + bL_2 + cL_3 = 0$ si L_i sont les lignes de A.

III – Changement de base

Problème 1 :

Soit E un espace vectoriel possédant deux bases $B_E = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ et $B_{E'} = (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$.
Tout vecteur $\vec{v}$ de E possède donc *deux* systèmes de coordonnées :

$* \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans B_E

$* \ X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans $B_{E'}$

Quel est alors le lien entre X et X' ?

Problème 2 : Faire la même chose avec les matrices associées à une application linéaire donnée.

1. Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel, $B = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ son « ancienne » base et $B' = \left(\overrightarrow{e'_1}, \dots, \overrightarrow{e'_n}\right)$ sa « nouvelle » base.

Chaque $\overrightarrow{e'_j}$ se décompose par rapport à B.

$\overrightarrow{e'_j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\vec{e_i}$ avec p_{ij} la i^ème coordonnée de $\vec{u_j}$ par rapport à $\vec{e_i}$.

Définition : On appelle *matrice de passage* de B à B' la matrice $P_{B,B'} = (p_{ij})$.

$$P_{B,B'} = \begin{array}{cc} \left(\begin{matrix} \square & \cdots & \square \\ \square & p_{ij} & \square \\ \square & \cdots & \square \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_i} \\ \vec{e_n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \overrightarrow{e'_1} & \overrightarrow{e'_i} & \overrightarrow{e'_n} \end{matrix} & \end{array}$$

On met en colonnes les coordonnées de la nouvelle base à l'aide de l'ancienne.

Propriétés :
i) Toute matrice de passage est inversible.
ii) On a $\left(P_{B,B'}\right)^{-1} = \left(P_{B',B}\right)$.

Démonstration :
On peut voir P comme une matrice associée à l'application identité !

$$Id_E : \begin{matrix} E \to E \\ \vec{v} \mapsto \vec{v} \end{matrix} \quad \to \; P_{B,B'} = \underset{B',B}{Mat}(Id_E)$$

$\to P_{B,B'}$ est inversible et $\left(P_{B,B'}\right)^{-1} = \underset{B,B'}{Mat}(Id^{-1}) = \left(P_{B',B}\right)$

2. Formule de changement de base pour les vecteurs

Soit $\vec{v}$ un vecteur de E. Alors

$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i} \to X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base B et

$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \overrightarrow{e'_i} \to X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ dans la base B'.

Quel est alors le lien entre X et X' ?

Théorème : On a $X = P_{B,B'} X'$

Attention à la terminologie : la matrice de passage $P_{B,B'}$ dite « de B à B' », permet de calculer les coordonnées dans B à l'aide de celles dans B', et non l'inverse !

Démonstration : On étudie l'application identité $Id_E : E_{B'} \to E_B : \vec{v} \mapsto \vec{v}$ au niveau matriciel :

$$X' \xrightarrow{P=Mat(Id)} X = P_{B,B'} X'$$

Remarque : Si on veut X' à l'aide de X, on a $X' = P_{B',B} X = P_{B,B'}^{-1} X$, c'est-à-dire qu'il faut inverser $P_{B,B'}$.

Exemple : Pour deux repères de $\mathbb{R}^2$ décalés l'un de l'autre d'une rotation d'angle θ.

$$P_{B,B'} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad\vec{u_1} & \qquad\vec{u_2} \end{array} & \end{array}$$

Les coordonnées de $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ deviennent $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ avec
$X = P_{B,B'} X'$ et $X' = P_{B',B} X$.

En fait on a aussi
$P_{B,B'} = \underset{B_E,B_E}{Mat}(R_\theta)$ et donc $P_{B,B'}^{-1} = \underset{B_E,B_E}{Mat}(R_{-\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

$$\to X = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} X' \;\text{ et }\; X' = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, x + \sin\theta\, y \\ -\sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{pmatrix}$$

3. Formules de changement de base pour les application linéaire et les matrices

Théorème du changement de base général :
Soit $f: E \to F$ où B_E et B_F sont les anciennes bases respectives de E et F et $B_{E'}$ et $B_{F'}$ leur nouvelle base respective.

Soient $A = \underset{B_E,B_F}{Mat}(f)$, $A' = \underset{B_{E'},B_{F'}}{Mat}(f)$, $P = P_{B_E,B_{E'}}$ et $Q = P_{B_F,B_{F'}}$.

Alors on a $A' = Q^{-1}AP$.

Théorème pour les endomorphismes :
Dans ce cas particulier, $P = Q$ donc $A' = P^{-1}AP$

Démonstration abstraite : On regarde $f : E \to F$ au niveau matriciel.

$$f: E \to F$$

$$\begin{tikzcd} B_{E'} \arrow[r, "A'"] \arrow[d, bend right, "P"'] & B_{F'} \\ B_E \arrow[r, "A"] & B_F \arrow[u, bend right, "Q^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

On a bien $f = Id \ o \ f \ o \ Id$ ce qui donne en matrices $A' = Q^{-1}AP$.

Approche plus concrète :

$$\begin{array}{c} \vec{v} \xrightarrow{f} f(\vec{v}) \\ X \xrightarrow{A} Y = AX \\ X' \xrightarrow{A'} Y' = A'X' \end{array}$$

B_E, B_F $\quad$ $B_{E'}, B_{F'}$

On sait que $X = PX'$ et que $Y = QY'$

$\to Y = AX = APX' = QY'$

$\to Y' = (Q^{-1}AP)X' = A'X'$

Ceci est vrai pour tout X' $\to$ mêmes matrices : $A' = Q^{-1}AP$.

Remarque : On évite si possible d'utiliser la formule $A' = P^{-1}AP$ pour des calculs à la main dans les exercices.
En effet, cette formule implique beaucoup de calculs. (Ce qui ne pose pas de problèmes aux machines.)

La plupart du temps, il vaut mieux se ramener à la définition de $A' = \underset{B_{E'},B_{F'}}{Mat}(f)$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ et $f: \substack{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ X \mapsto AX}$ dans la base canonique B.

Problème : Montrer qu'il existe $B' = \left(\overrightarrow{e'_1}, \dots, \overrightarrow{e'_n}\right)$ tel que $\underset{B',B'}{Mat}(f) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{array}\right) = A'$

On a $rg(A) = rg(f) = 1$ (colonnes proportionnelles)

Le théorème du rang donne $\dim \ker f = n - 1$

Equation $x_1 + \cdots + x_n = 0 \Leftrightarrow AX = 0$

Pour trouver $\overrightarrow{e'_n}$, on remarque qu'on doit avoir $f(\overrightarrow{e'_n}) = n\overrightarrow{e'_n} \Rightarrow \overrightarrow{e'_n} \in \operatorname{Im} f$

On prend $\overrightarrow{e'_n} = (1, \dots, 1)$ et on a bien $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = n\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$.

Conclusion : On prend une base $\left(\overrightarrow{e'_1}, \dots, \overrightarrow{e'_{n-1}}\right)$ de $\ker f$ et on complète avec $\overrightarrow{e'_n} \notin \ker f$.

→ C'est la base B' souhaitée.

4. Trace d'une matrice carrée

Définition : Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.
On appelle trace de A la donnée $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = Tr(A)$

Théorème : Soit f un endomorphisme de E, d'ancienne base B_E et de nouvelle base $B_{E'}$

On a $Tr\left(\underset{B_E,B_E}{Mat}(f)\right) = Tr\left(\underset{B_{E'},B_{E'}}{Mat}(f)\right)$ soit $Tr(A) = Tr(A')$

Lemme : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ Tr(AB) = Tr(BA)$.

Démonstration du lemme :
On a $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \to (AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$. D'où :

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = Tr(BA)$$

Démonstration du théorème : On a $A' = P^{-1}AP$. D'où par le lemme :

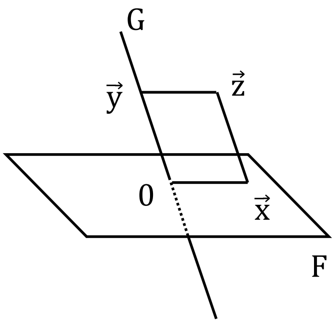
$$Tr(A') = Tr(P^{-1}AP) = Tr(APP^{-1}) = Tr(A).$$

Exemple : Une projection sur un espace vectoriel de dimension k dans $\mathbb{R}^n$ possède une matrice A de trace k, quelle que soit la base de travail.

On sait que $E = F \oplus G$ avec $p: \underset{x=y+z\mapsto p(x)=y}{E \to E}$

On travaille dans une base $B' = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_k}, \overrightarrow{u_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ de E telle que

$$(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_k}) \in F \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{u_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{u_n}) \in G.$$



$$A = \underset{B',B'}{Mat}(p) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} p(\vec{u_1}) & & p(\vec{u_k}) & p(\overrightarrow{u_{k+1}}) & & p(\vec{u_n}) \end{matrix} \end{array}$$

D'où $A = \underset{B',B'}{Mat}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$ ce qui montre que $Tr(A) = k$.

IV – Rang des matrices

1. Définitions, premières propriétés

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *rang* de A le rang des p vecteurs *colonnes* de A.

On a $A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{v_1} & \cdots & \vec{v_p} \end{matrix} \\ \left(\begin{matrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{matrix}\right) \\ \underleftrightarrow{\quad p \quad} \end{array} \updownarrow n$ → C'est-à-dire $rg(\mathcal{A}) = \dim Vect(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p})$

Proposition : Soient $f: E \to F$ une application linéaire et B_E, B_F les bases respectives de E et F, avec $\dim E = p$ et $\dim F = n$. Soit $A = \underset{B_E,B_F}{Mat}(f)$ la matrice associée à f.

On a $rg(f) = rg(A) = \dim \operatorname{Im} f$.

Ainsi la définition du rang d'une matrice est compatible avec son interprétation comme application linéaire.

Démonstration : Par construction : $\begin{cases} \vec{v_1} = f(\vec{e_1}) \text{ première colonne de A} \\ \qquad \vdots \\ \vec{v_p} = f(\vec{e_p}) \text{ pième colonne de A} \end{cases}$

Par définition, $rg(f) = \dim \operatorname{Im} f$

$$= \dim Vect\left(f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_p})\right)$$

$$= \dim Vect(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p})$$

Propriétés générales :

i) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a toujours $rg(A) \le \min(n, p)$.

ii) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $rg(A) \le n$ avec égalité si A est inversible.

Démonstration :

i) $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to n$ lignes et p colonnes

$\to rg(A) = \dim Vect(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}) \le p$

De plus, $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p} \in \mathbb{K}^n$ donc $Vect(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}) \subset \mathbb{K}^n \to rg(A) \le n$.

ii) Cas d'égalité pour les matrices carrées :

A inversible $\Leftrightarrow f$ associée est un isomorphisme
$\Leftrightarrow f(base)$ est une base de $\mathbb{K}^n$
$\Leftrightarrow$ Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$
$\Leftrightarrow rg(A) = n$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \leftrightarrow f: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$

Ici, $rg(A) \leq 2$ et $rg(A) \leq 6$

Les deux premières colonnes de A sont non colinéaires $\to rg(\mathcal{A}) = 2$

2. Techniques de calcul de rang

Rappel : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p} \in \mathbb{K}^n$ ses colonnes.

Par définition, $rg(A) = rg\left(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p}\right)$. Pour le calculer, on utilise le système à p inconnues et n équations :

$$(S) : x_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + x_p\overrightarrow{v_p} = \vec{0}$$

On a vu que $rg\left(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p}\right) =$ nombre d'inconnues principales du système échelonné par le pivot de Gauss.

Conséquence : Pour calculer le rang de A, on peut échelonner la matrice en travaillant sur les lignes i.e. par équation avec le pivot de Gauss.

i) Opérations élémentaires sur les lignes

$*$ Multiplier une ligne par une constante non nulle

Attention : Éviter de multiplier une ligne par un paramètre, qui pourrait s'annuler…

$*$ Intervertir deux lignes

$*$ Ajouter à une ligne de A une combinaison linéaire des autres lignes de A

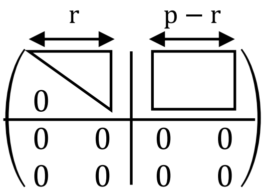
$*$ Supprimer une ligne nulle (i.e. constituée uniquement de 0)

Attention : Il faut pouvoir faire ces opérations de manière *séquentielle*.

Exemple : $rg\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $rg\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 - L_2 \\ L_2 \to L_2 - L_1 \end{matrix}$ sont différents, car les opérations n'ont pas été faites de manière séquentielle. On a $rg\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$ et $rg\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1$.

$(1,2)$ et $(2,1)$ ne sont pas colinéaires alors que $(1,-1)$ et $(-1,1)$ le sont.

A la fin des opérations, on obtient une matrice échelonnée :

$A' =$  avec $a_{11}, \dots, a_{rr}$ tous non nuls (les pivots),

et ce à permutation des colonnes près.

On a alors $rg(A) = rg(A') = r =$ nombre d'inconnues principales associées au système.

Attention : Les r premières colonnes de A' ne donnent pas une base de $\operatorname{Im} A$

Par contre, une base de $\operatorname{Im} A$ est donnée par les vecteurs colonnes de A (matrice de départ) qui correspondent aux inconnues principales du système (S) = les indices des colonnes des pivots.

Exemple : Calculer le rang de $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda - 1 & 3\lambda & 3\lambda \\ 1 & 0 & \lambda + 1 & 2 \\ 1 & 0 & \lambda + 1 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$.

$$rg(A_\lambda) = rg\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On a une matrice triangulaire supérieure.

$rg(A_\lambda) = 4$ si et seulement si tous les nombres sur la diagonale sont non nuls

$*\ rg(A_\lambda) = 4$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$

$*$ Cas $\lambda = 0$: $rg(A_0) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow rg(A_0) = 2$

Une base de $\operatorname{Im} A_0$ est donnée par les deux premières colonnes de A_0.

$*$ Cas $\lambda = 1$: $rg(A_1) = rg\begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On retire la colonne nulle : $rg(A_1) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1/2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow rg(A_1) = 3$

Une base de Im A_1 est donnée par les colonnes 1,3,4 de A_1. (Attention, on a retiré la seconde colonne → décalage des inconnues principales.)

Autre méthode : Remarquer que $(0,2,1) = 2(0,1,0) + (0,0,1)$
→ On soustrait et on obtient une ligne nulle qu'on peut effacer.

ii) Opérations élémentaires sur les colonnes

Théorème : Le rang d'une matrice A est inchangé lorsque :

∗ On multiplie une colonne par une constante non nulle

∗ On ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes

∗ On intervertit deux colonnes

∗ On supprime une colonne nulle

Conséquence : On peut échelonner ou simplifier A en agissant sur les lignes ou les colonnes avec les opérations élémentaires.

Exemple : Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} a & d & a+d \\ b & e & b+e \\ c & f & c+f \end{pmatrix}$

On voit clairement que $C_3 = C_1 + C_2$

→ On peut supprimer la troisième colonne de la matrice.

→ $rg(A) = rg\begin{pmatrix} a & d & a+d \\ b & e & b+e \\ c & f & c+f \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = 2$ si les colonnes ne sont pas colinéaires.

Théorème :
L'image d'une application linéaire f associée à la matrice est préservée si on échelonne les colonnes.

Démonstration : Par définition, Im $f = Vect\big($colonnes $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p}$ de $A\big)$

On pose $S = \left(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p}\right) \ \rightarrow \ Vect(S)$ est préservé par les opérations élémentaires sur les colonnes.

Cela est clair pour toutes les opérations, sauf peut-être pour l'ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres colonnes.

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_j} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_p} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \overrightarrow{v_1}' = \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_j}' = \overrightarrow{v_j} + \sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{v_i} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_p}' = \overrightarrow{v_p} \end{pmatrix}$$

$\vec{v_j}' \in Vect(S) \Rightarrow Vect(S') \subset Vect(S)$
$\vec{v_j} = \vec{v_j}' - \sum_{i \neq j} \lambda_i \vec{v_i} \in S' \Rightarrow Vect(S) \subset Vect(S')$

3. Rang et matrices équivalentes

Notation : On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ inversibles.

Rappel : $P \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si P est une matrice de passage entre deux bases B et B' de $\mathbb{K}^n$

$$P_{B,B'} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \Box & \cdots & \Box \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \vdots \\ \vec{e_n} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \vec{u_1} & & \vec{u_n} \end{array} & \end{array}$$

est inversible si et seulement si $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Définition : On dit que deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ tels que $A' = Q^{-1}AP$. On note alors $A \sim A'$

A et A' sont associées à une même application linéaire $f: \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ à un changement de base $B_p, B_p' \subset \mathbb{K}^p$ et $B_n, B_n' \subset \mathbb{K}^n$

Propriétés : La relation $\sim$ est une relations d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$*\sim$ est *réflexive* : $A \sim A \to \mathcal{P} = I_p$ et $Q = I_n$

$*\sim$ est *symétrique* : $A \sim B \overset{?}{\Rightarrow} B \sim A$
$\exists\, P, Q$ inversibles avec $B = Q^{-1}AP$
$\to A = QBP^{-1} = Q'^{-1}BP'$ avec $P' = P^{-1}$ et $Q' = Q^{-1}$

$*\sim$ est *transitive* : $A \sim B$ et $B \sim C \overset{?}{\Rightarrow} A \sim C$
$\exists\, P_1, P_2, Q_1, Q_2$ inversibles tels que $B = Q_1^{-1}AP_1$ et $C = Q_2^{-1}BP_2$
$\to C = Q_2^{-1}Q_1^{-1}AP_1P_2 = Q^{-1}AP$ avec $P = P_1P_2$ et $Q = Q_1\, Q_2$ inversibles

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ se décompose alors en *classes d'équivalence* :

$$C_A = \{B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \mid B \sim A\}$$

Théorème :
i) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $r = rg(A)$.

Alors A est équivalente à la matrice $I_{r,n,p} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ avec $I_r = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{r} \updownarrow r$

ii) Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Démonstration : i) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to f: \begin{smallmatrix} \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n \\ X \mapsto AX \end{smallmatrix}$ dans les bases canoniques B_p et B_n

Il s'agit de trouver deux nouvelles bases B'_p de $\mathbb{K}^p$ et B'_n de $\mathbb{K}^n$ telles que $\underset{B'_p,B'_n}{Mat}(f) = I_{r,n,p}$

Attention : On s'autorise à changer de base au départ et à l'arrivée, même quand $p = n$.

Analyse : Si cela marche, il faut que :

$$\underset{B'_p,B'_n}{Mat}(f) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\ 0&\ddots&\ddots&0&\vdots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&\cdots&1&0&\cdots&0\\ \hline 0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&\cdots&0&0&\cdots&0 \end{array}\right) & \begin{array}{c}\overrightarrow{u_1}'\\ \overrightarrow{u_2}'\\ \\ \overrightarrow{u_r}'\\ \overrightarrow{u_{r+1}}'\\ \\ \overrightarrow{u_n}'\end{array} \\ \begin{array}{ccccc} f(\overrightarrow{e_1}') & f(\overrightarrow{e_2}') & f(\overrightarrow{e_r}') & f(\overrightarrow{e_{r+1}}') & f(\overrightarrow{e_p}')\end{array} & \end{array}$$

C'est-à-dire : $\begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}') = \overrightarrow{u_1}' \\ \vdots \\ f(\overrightarrow{e_r}') = \overrightarrow{u_r}' \\ f(\overrightarrow{e_{r+1}}') = \cdots = f(\overrightarrow{e_p}') = \vec{0} \end{cases}$

On prend $(\overrightarrow{e_{r+1}}', \dots, \overrightarrow{e_p}')$ base de $\ker f$, ce qui est possible car le théorème du rang donne que $\dim \ker f = p - rg(f) = p - r$.

On prend ensuite un supplémentaire E de $\ker f$ dans $\mathbb{K}^p$

On a alors $\dim E = p - \dim \ker f = p - (p - r) = r$

On complète la famille $(\overrightarrow{e_{r+1}}', \dots, \overrightarrow{e_p}')$ en une base $(\overrightarrow{e_1}', \dots, \overrightarrow{e_r}', \overrightarrow{e_{r+1}}', \dots, \overrightarrow{e_p}') = B'_p$ de $\mathbb{K}^p$

$(\overrightarrow{e_1}', \dots, \overrightarrow{e_r}')$ est une base de E et $(\overrightarrow{e_{r+1}}', \dots, \overrightarrow{e_p}')$ une base de $\ker f$

Synthèse : on pose $\begin{cases} \overrightarrow{u_1}' = f(\overrightarrow{e_1}') \\ \vdots \\ \overrightarrow{u_r}' = f(\overrightarrow{e_r}') \end{cases}$ et on vérifie que $(\overrightarrow{u_1}', \dots, \overrightarrow{u_r}')$ est libre.

On regarde $\lambda_1\overrightarrow{u_1}' + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{u_n}' = \vec{0}$ soit $f(\lambda_1\overrightarrow{e_1}' + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{e_n}') = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \lambda_1\overrightarrow{e_1}' + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{e_n}' \in \ker f$ avec $\lambda_1\overrightarrow{e_1}' + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{e_n}' \in E$

$\Rightarrow \lambda_1\overrightarrow{e_1}' + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{e_n}' = \vec{0}$ car $\ker f \cap E = \{\vec{0}\}$

Ce qui fait $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ car la famille $(\overrightarrow{e_1}', \dots, \overrightarrow{e_r}')$ est libre

$\Rightarrow$ La famille $(\overrightarrow{u_1}', \dots, \overrightarrow{u_r}')$ est libre

On peut alors compléter la famille $(\overrightarrow{u_1}', \dots, \overrightarrow{u_r}')$ en une base $B'_n = (\overrightarrow{u_1}', \dots, \overrightarrow{u_r}', \overrightarrow{u_{r+1}}', \dots, \overrightarrow{u_p}')$

ii) Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il faut montrer que $A \sim B \Leftrightarrow rg(A) = rg(B)$

($\Leftarrow$) : $rg(A) = rg(B) = r \Rightarrow A \sim I_{r,n,p} \sim B$ donc $A \sim B$ par transitivité.

($\Rightarrow$) : On a défini le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme le rang d'une application linéaire associée $f: \substack{\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n \\ X \mapsto AX} \rightarrow rg(f) = rg(A) = \dim \operatorname{Im} f$

Si $A \sim B$ alors il existe des nouvelles bases B'_p de $\mathbb{K}^p$ et B'_n de $\mathbb{K}^n$ avec $\underset{B'_p, B'_n}{Mat}(f) = B$

$\rightarrow rg(B) = \dim \operatorname{Im} f = rg(A)$, car $\dim \operatorname{Im} f$ étant indépendant de la base de travail.

4. Rang et transposition

Théorème : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a $rg(A) = rg({}^tA)$.

Autre formulation : Le rang des colonnes de A est égal au rang des lignes de A.

Remarque : On a $rg\begin{pmatrix} a & d & a+d \\ b & e & b+e \\ c & f & c+f \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d & b+e & c+f \end{pmatrix} \leq 2$, car les colonnes de la première matrice sont liées : $C_3 = C_1 + C_2$. C'est donc aussi le cas de ses lignes, mais c'est beaucoup moins évident, puisque l'on a :

$$(fb - ec)L_1 + (dc - af)L_2 + (ae - bd)L_3 = 0\ !$$

Attention : Les matrices A et ${}^tA$ ne peuvent pas être équivalentes si $n \neq p$

Démonstration : On pose $r = rg(A)$. On sait que $A \sim I_{r,n,p}$

D'où $\exists\, P \in GL_p(\mathbb{K}),\ \exists\, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $A = Q^{-1} I_{r,n,p} P$

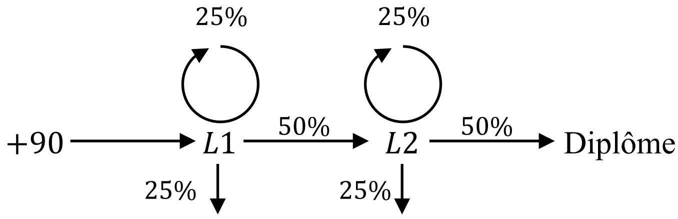
$\rightarrow {}^tA = {}^tP\, {}^tI_{r,n,p}\, {}^tQ$ avec ${}^tP = Q'^{-1}$ et ${}^tQ^{-1} = P'$ inversibles

De plus, on a ${}^tI_{r,n,p} = I_{r,p,n}$ de rang r.

On a donc que ${}^tA \sim I_{r,p,n} \rightarrow rg(A) = rg({}^tA) = r$.

V – Illustration du calcul matriciel : évolution d'un système

On étudie l'évolution des effectifs dans un cycle d'étude de deux ans $L1$ et $L2$ dont les probabilités de passage, de redoublement, et d'abandons, sont rapportées dans le digramme suivant.



Question 1 : Les effectifs se stabilisent-ils ?

Question 2 : Quel est le taux de réussite du cycle ?

Pour une année n, on note : $A(n) = \begin{pmatrix} a_1(n) \\ a_2(n) \end{pmatrix}$ où $a_1(n)$ représente l'effectif en $L1$ et $a_2(n)$ l'effectif en $L2$.

On voit que $A(n+1) = \begin{pmatrix} a_1(n+1) \\ a_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a_1(n) + 90 \\ \frac{1}{4}a_2(n) + \frac{1}{4}a_1(n) \end{pmatrix}$

Ce qui fait $A(n+1) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1(n) \\ a_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} A(n) + \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \end{pmatrix}$

On obtient donc que la suite $A(n)$ satisfait la relation de récurrence linéaire :

$$A(n+1) = TA(n) + E \text{ avec } T = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

∗ Si les effectifs sont constants, quels sont ils ?

On cherche à trouver les effectifs tels que $A(n+1) = A(n) = A$ ce qui ramène à l'équation :

$A = TA + E \Leftrightarrow (I_2 - T)A = E$

Avec $I_2 - T = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible car le déterminant est non nul.

$\rightarrow (I_2 - T)A = E \Leftrightarrow A = (I_2 - T)^{-1}E = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix}$

$\rightarrow a_1(n) = 120$ étudiants en L_1 et $a_2(n) = 80$ étudiants en L_2.

Le *taux de réussite* est : $\frac{a_2/2}{90} = \frac{40}{90} = 44\%$, ce qui peut paraître élevé en regardant rapidement le diagramme !

∗ Pour connaitre le comportement des effectifs en général, on doit résoudre la récurrence linéaire : $A(n+1) = TA(n) + E$.

On écrit pour cela $E = A - TA$, d'où $A(n+1) - A = T(A(n) - A)$, c'est-à-dire que la suite $\Delta(n) = A(n) - A$ est une suite géométrique :

$$\Delta(n+1) = T\,\Delta(n).$$

On a donc : $\Delta(n) = T^n\,\Delta(0)$.

On calcule T^n par récurrence. Ona : $T = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}M$.

On calcule : $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, …→ $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$ par une récurrence facile.

Par conséquent,

$$T^n = \frac{1}{4^n} M^n = \frac{1}{4^n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$$

est une suite de matrices dont les coefficents tendent très vite vers 0.

Conclusion : La suite $\Delta(n) = A(n) - A = T^n \Delta(0)$ tend très vite vers 0, c'est-à-dire que les effectifs $A(n)$ convergent vers les effectifs stables $A = (120,90)$, et ce quels que soient les effectifs initiaux $A(0)$.

Le calcul matriciel se prête donc très bien à l'étude de l'évolution d'un système dont les transitions sont déterminées par des probabilités.